2장 상대론 II

2.1 상대론적 운동량과 뉴턴 법칙의 상대론적 형태

고립계내의 두 물체의 충돌에서 운동량의 보존

→ 힘의 작용원리에서 요구되는 가장 원시적인 보존원리

※ 운동량을 $\vec{p}=m\vec{u}$로 정의하면 로렌츠 변환에서 운동량이 보존되지 않는다.

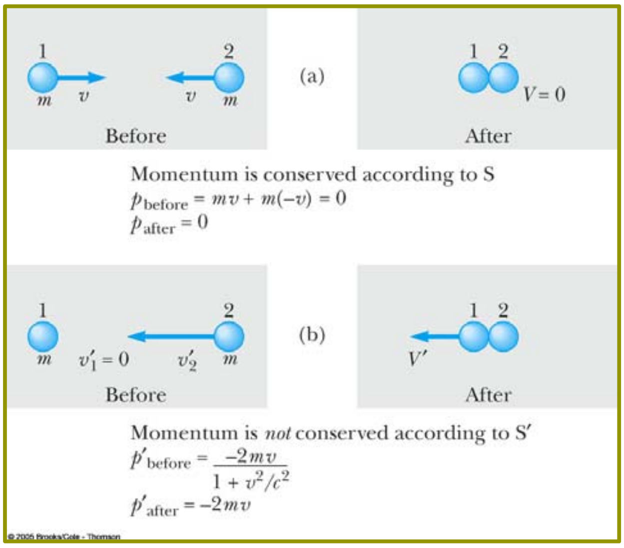


그림 2.1 (a) S 기준틀의 관찰자가 본 두 동일한 진흙덩어리 사이의 비탄성 충돌 (b) 같은 충돌을 S에 대해 v의 속력으로 오른쪽으로 움직이는 기준틀 S'에서 본 것.

두 동일한 입자의 비탄성충돌

두 동일한 입자가 같은 속력 v로 다가와 비탄성충돌을 일으킨다.

S'기준계에서 충돌 전후의 운동량 보존을 살펴보면

충돌전의 물체의 속도

$$v_1{}' = \frac{v_1 - v}{1-(v_1 v/c^2)} = \frac{v-v}{1-(v^2/c^2)} = 0$$

$$v_2{}' = \frac{v_2 - v}{1-(v_2 v/c^2)} = \frac{-v-v}{1-[(-v)(v)/c^2]} = \frac{-2v}{1+(v^2/c^2)}$$

충돌후의 물체의 속도

$$V' = \frac{V-v}{1-(Vv/c^2)} = \frac{0-v}{1-[(0)v/c^2]} = -v$$

따라서 충돌 전후의 운동량은

$$p'_{before} = mv_1{}' + mv_2{}' = m(0) + m\left[\frac{-2v}{1+(v^2/c^2)}\right] = \frac{-2mv}{1+(v^2/c^2)}$$

$$p'_{after} = 2mV' = -2mv$$

이 되어

$$p'_{before} \neq p'_{after}$$

즉 운동량이 보존되지 않는다.

상대론적 운동량

$$\vec{p} \equiv \frac{m\vec{u}}{\sqrt{1-(u^2/c^2)}} = \gamma m\vec{u}$$ 상대론적 운동량의 정의 (2.1)

1) $u \ll c$ 에서 $\vec{p} \cong m\vec{u}$ → 고전적 표현으로 수렴
2) $\gamma = 1/\sqrt{1-(u^2/c^2)}$

식(2.1)로 정의된 운동량을 적용하면, 그림(2.1)의 S'기준계에서 충돌 전후 운동량이 보존되는가?

$$p'_{before} = \frac{mv_2'}{\sqrt{1-(v_2')^2/c^2}} \qquad (*1)$$

$$p'_{after} = \frac{-2mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad (*2)$$

$v_2' = \dfrac{-2v}{1+v^2/c^2}$ 이므로

$$1-(v_2')^2/c^2 = 1-\frac{4v^2/c^2}{[1+(v^2/c^2)]^2} = \frac{[1-v^2/c^2]^2}{[1+v^2/c^2]^2}$$

$$\sqrt{1-(v_2')^2/c^2} = \frac{[1-v^2/c^2]}{[1+v^2/c^2]}$$

따라서

$$p'_{before} = \frac{mv_2'}{\sqrt{1-(v_2')^2/c^2}} = \frac{-2mv/(1+v^2/c^2)}{(1-v^2/c^2)/(1+v^2/c^2)}$$
$$= \frac{-2mv}{1-v^2/c^2}$$

즉

$$p'_{before} = \frac{-2mv}{1-v^2/c^2} \qquad (*3)$$

이 되어 여전히 $p'_{before} \neq p'_{after}$이 되어 운동량이 보존되지 않는다.

그러나

$$p'_{after} = \frac{-Mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$M = \frac{2m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$; 질량의 팽창, 운동에너지가 정지질량으로 변환된 것.

이면

$$p'_{after} = \frac{-2mv}{1-v^2/c^2} \qquad (*4)$$

이 되어

$$p'_{before} = p'_{after}$$

운동량 보존이 성립된다.

▒▒▒▒▒▒▒▒▒Tipler▒▒※Begin※▒▒

Galilei 변환

$\vec{a}=\vec{a}'$, $\therefore \vec{F}=m\vec{a}$ 이면 $\vec{F}=m\vec{a}'$

상대론적 변환

$$a_x = \frac{a_x'}{\gamma^3(1+u_x' V/c^2)^3}$$

$$F_x = \frac{F_x'}{\gamma^3(1+u_x' V/c^2)^3}$$

➡ $\vec{F}=m\vec{a}$ 가 성립하지 않는다.

$\vec{F}=m\vec{a}$가 성립하지않는 또 다른 이유

1. 일정한 힘으로 물체를 무한히 가속하면 ∞의 속도를 얻게 되고 이것은 사리에 맞지 않음
2. $v > c$ 이면 $\gamma \to$허수 ⇒변환불능
3. 속도변환 : 광속보다 빠를 수 없다.

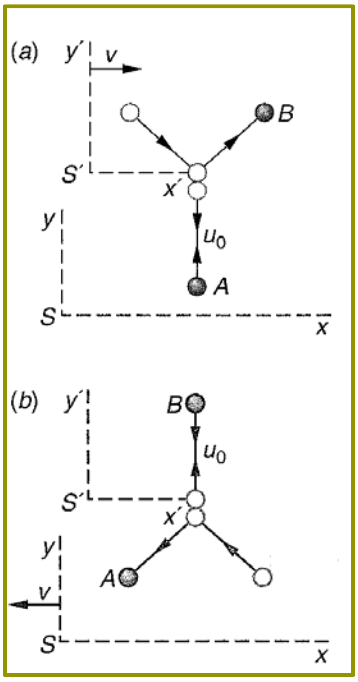
운동량 보존

S, S′계에서 각각 u_0의 속도로 충돌시킨다.

충돌 전

$$u_{xA}=o,\quad u_{yA}=u_0,\qquad u_{zA}=o$$

$$u_x{}'_B=0, u_y{}'_B=-u_0, u_z{}'_B=0$$



운동량이 보존되기 위해서는 , 충돌 전후에 부호가 바뀌므로

➡ $-p_y=+p_y$ 즉 $p_y=0$인 경우에만 성립

B공을 S계에서 관측

$$u_{xB}=v$$

$$u_{yB}=\frac{(-)u_0}{\gamma}$$

$$u_{zB}=0$$

운동량의 y방향 성분은

$$mu_{yA}=+mu_0 \qquad (**)$$

$$mu_{yB}=(-)mu_0/\gamma=(-)mu_0\sqrt{1-v^2/c^2}$$

$$p_y=mu_{yA}+mu_{yB}=mu_0(1-\sqrt{1-v^2/c^2}\,)\neq 0$$

➡ 즉 운동량이 보존되지 않는다.

S′계에서도 같은 결과

$v \ll c$ 인 경우 → 보존

상대론적 운동량

1. $\vec{p}$는 충돌에 있어서 보존된다.

2. u/c 가 0 에 접근할 때 $\vec{p}$는 $m\vec{u}$에 접근한다.

(**)식의 질량을

$m \rightarrow \dfrac{m}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$ 으로 바꾸면 $\Rightarrow$運動量이 保存된다.

(증명) * $u_0 \ll 1$인 경우 : 살짝쓰친다.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{1-u_B^2/c^2}}$$

공 B에 대하여

$$\frac{mu_{yB}}{\sqrt{1-u_B^2/c^2}} = (-)\frac{mu_0\sqrt{1-v^2/c^2}}{\sqrt{1-u_B^2/c^2}} \simeq (-)mu_0$$

공 A에 대하여

$$\frac{mu_{yA}}{\sqrt{1-u_A^2/c^2}} = (+)\frac{mu_0}{\sqrt{1-u_0^2/c^2}} \simeq (+)mu_0$$

∴ 살짝 스치는 특별한 경우 상대론적운동량을

$$\vec{P} = \frac{m\vec{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \qquad (***)$$

로 정의하면 “운동량은 보존”된다.

※ 임의의 u_0에 대한 증명

$$p_{yA} = \frac{mu_0}{\sqrt{1-u_0^2/c^2}} \qquad : \quad \text{공 } A \text{ 의 운동량}(S\text{계})$$

$$u_B^2 = u_{xB}^2 + u_{yB}^2 = v^2 + \left(u_0\sqrt{1-v^2/c^2}\right)^2$$

$$= v^2 + u_0^2 - \frac{u_0^2 v^2}{c^2}$$

$$\therefore 1 - \frac{u_B^2}{c^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2} - \frac{u_0^2}{c^2} + \frac{u_0^2 v^2}{c^4}$$

$$= (1-\frac{v^2}{c^2})(1-\frac{u_0^2}{c^2})$$

$$p_{yB} = \frac{mu_{yB}}{\sqrt{1-u_B^2/c^2}} = \frac{(-)mu_0\sqrt{1-v^2/c^2}}{\sqrt{(1-v^2/c^2)(1-u_0^2/c^2)}}$$

$$= \frac{-mu_0}{\sqrt{1-u_0^2/c^2}}$$

$\therefore p_{yA}+p_{yB}=0,$ 즉 충돌 전후 운동량이 보존

따라서 임의의 $\vec{u}$에 대한 상대론적 운동량은

$$\vec{p}=\gamma m\vec{u} \qquad (***)$$

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

▒▒▒▒▒Tipler▒▒※End※▒▒

상대론적 뉴턴의 제2법칙(relativistic form of Newton's second law)

$$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d}{dt}(\gamma m\vec{u})$$

일정한 힘이 u의 방향으로 주어질 때 입자의 상대론적 가속도는(문제3)

$$a=\frac{F}{m}(1-u^2/c^2)^{3/2}$$

속도가 c에 가까워짐에 따라 모든 유한한 힘에 의한 가속도는 영에 가까워진다.

➡ 입자를 c보다 크거나 같은 속력으로 가속시키는 것은 불가능하다.

예제 2.1 전자의 운동량

$m=9.11\times10^{-31}\mathrm{kg},\ u=0.750\mathrm{c}$인 전자의 상대론적 운동량

$$p=\frac{mu}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

$$=\frac{(9.11\times10^{-31}\mathrm{kg})(0.750\times3.00\times10^{8}\mathrm{m/s})}{\sqrt{1-(0.750c)^2/c^2}}$$

$$=3.10\times10^{-22}\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m/s}$$

고전적 표현

$$p=mu=2.05\times10^{-22}\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m/s}$$

예제 2.2 상대론적 형태 $\vec{F}=d\vec{p}/dt$의 응용

고속 대전 입자의 운동량의 측정

질량 m, 전하 q인 입자가 속도 $\vec{u}$로 자기장 $\vec{B}(\vec{B}\perp\vec{u})$에 주입된다.

$$\vec{F}=q\vec{u}\times\vec{B}$$

이 힘은 구의 중심으로 향하고 반지름 R인 원운동을 하게 된다.

$$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d}{dt}(\gamma m\vec{u})$$

(풀이) 속력 u와 γ는 시간에 대해 상수

$$F=\gamma m\left|\frac{d\vec{u}}{dt}\right|=\gamma m\frac{u^2}{R} \qquad (2.3)$$

$$F=quB=\gamma m\frac{u^2}{R}$$

$$p=\gamma mu=qBR \qquad (2.4)$$

안개상자 등의 자취사진으로부터 상대론적 입자의 운동량을 측정하는 데 이용

2.2 상대론적 에너지

일-에너지 정리의 상대론적 형태

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dp}{dt} dx \tag{2.5}$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{mu}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{m\left(\frac{du}{dt}\right)}{(1-u^2/c^2)^{3/2}} \tag{2.6}$$

위 식과 $dx = udt$를 식 (2.5)에 대입하면

$$W = \int_{x_1}^{x_2} \frac{m\left(\frac{du}{dt}\right)udt}{(1-u^2/c^2)^{3/2}} = m\int_0^u \frac{udu}{(1-u^2/c^2)^{3/2}}$$

$u(x_1) = 0$, $u(x_2) = u$로 두어 적분을 하면

$$W = \frac{mc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - mc^2$$

일 에너지의 정리로부터, 처음의 속력이 영(0)이므로

$$\boxed{K = \frac{mc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - mc^2 = \gamma mc^2 - mc^2}$$

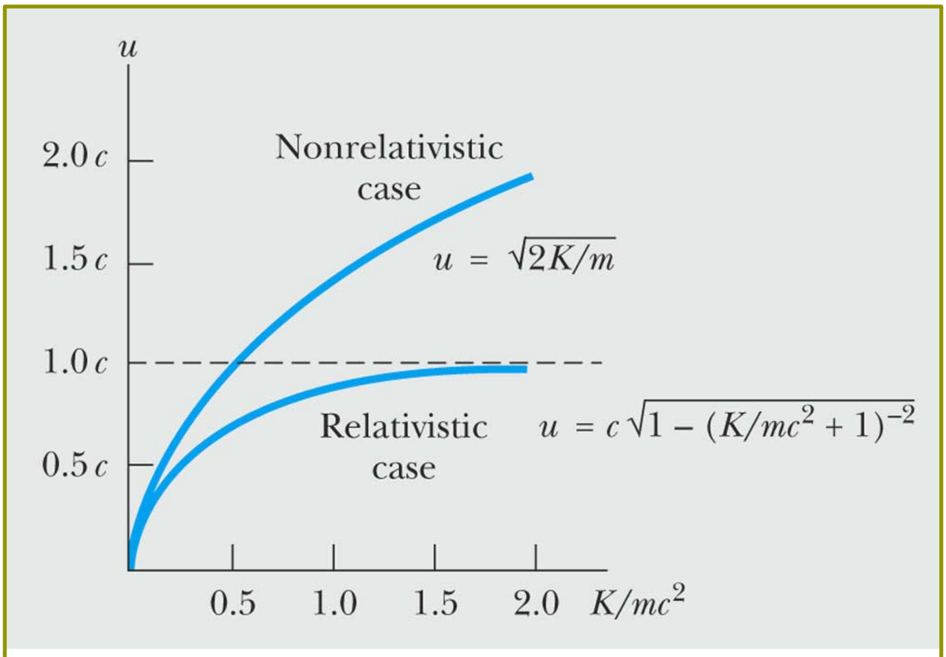
상대론적 운동에너지 (2.8)

$u/c \ll 1$인 느린 속력에서는 식(2.8)은 고전적 표현 $K = \frac{1}{2}mu^2$으로 환원된다.

$$\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2} + \cdots$$

$$K = mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2} + \cdots\right) - mc^2 \approx \frac{1}{2}mu^2$$

입자의 운동에너지가 아무리 크더라도 속력은 c를 넘지 못한다.



상대론적 운동에너지

$$K = \gamma mc^2 - mc^2$$

➡ $E_0 = mc^2$: 정지 에너지(rest energy)

➡ $E = \gamma mc^2$: 전체 에너지(total energy)

$$E = \gamma mc^2 = K + mc^2$$

질량-에너지 등가원리

$$E = \gamma mc^2$$

모든 에너지는 질량을 수반한다.

에너지-운동량의 관계

$$E^2 = p^2c^2 + (mc^2)^2 = p^2c^2 + E_0^2 \qquad (2.11)$$

광자(photon) : 정지질량(m)=0

$$E = pc \qquad (2.12)$$

$E^2 - p^2c^2$: 로렌츠 변환에서 불변량

전자볼트(ev)

$$1\text{eV} = 1.60 \times 10^{-19}\text{J}$$

전자의 질량 혹은 에너지

$$m_e c^2 = (9.11 \times 10^{-31}\text{kg})(3.00 \times 10^8 \text{m/s})^2 = 8.20 \times 10^{-14}\text{J}$$

$$m_e c^2 = (8.20 \times 10^{-14}\text{J})(1\text{eV}/1.60 \times 10^{-19}\text{J}) = 0.511\text{MeV}$$

$m_e = 0.511\text{MeV}/c^2$: 전자의 질량

예제 2.3 빠른 전자의 에너지

$u = 0.850c$의 속력을 가지는 전자의 전체 에너지와 운동에너지를 eV 단위로 나타내어라.

(풀이)

$m_e = 0.511\text{Mev}/c^2$ 이므로

$$E = \gamma m_e c^2 = \frac{0.511\text{MeV}}{\sqrt{1-(0.85c)^2/c^2}} = 1.90(0.511\text{MeV}) = 0.970\text{MeV}$$

$$K = E - m_e c^2 = 0.970\text{MeV} - 0.511\text{MeV} = 0.459\text{MeV}$$

예제 2.4 빠른 양성자의 에너지

$E = 3m_p c^2$일 때, 양성자의 정지 에너지를 eV 단위로, 속력과 운동에너지를 구하라.

(a) 양성자의 정지에너지

$$\text{정지에너지} = m_p c^2 = (1.67 \times 10^{-27}\text{kg})(3.00 \times 10^8\text{m/s})^2 (1\text{eV}/1.60 \times 10^{-19}\text{J}) = 938\text{MeV}$$

(b) 양성자의 속력

$$E = 3m_p c^2 = \frac{m_p c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

$$3 = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

$$\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) = \frac{1}{9} \text{ or } \frac{u^2}{c^2} = \frac{8}{9}$$

$$u = \frac{\sqrt{8}}{3}c = 2.83 \times 10^8\text{m/s} \quad ; \quad \text{양성자의 속력}$$

(c) 양성자의 운동에너지

$$K = E - m_pc^2 = 2m_pc^2 = 1876\mathrm{MeV}$$

(d) 양성자의 운동량

$$E^2 = p^2c^2 + (m_pc^2)^2$$

$$p^2c^2 = 9(m_pc^2)^2 - (m_pc^2)^2 = 8(m_pc^2)^2$$

$$p = \sqrt{8}\frac{m_pc^2}{c} = \sqrt{8}\frac{(938\mathrm{MeV})}{\mathrm{c}} = 2650\mathrm{MeV/c}$$

2.3 에너지 척도로서의 질량

질량-에너지 등가원리

1) $E = \gamma mc^2$
2) 질량이 에너지로 변환되고 에너지가 질량으로 변환된다.
3) 모든 에너지는 질량을 수반한다.

질량-에너지 보존(conservation of mass-energy)

상호작용전의 입자계 '질량-에너지'의 합이 반응 후의 입자계 '질량-에너지'의 합과 같다.

$$E_i = \frac{m_ic^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$: i-번째 입자의 질량-에너지

비탄성 충돌

그림 2.1a에서 충돌 후 운동에너지가 보존되지 않으나 상대론적 질량-에너지 보존법칙을 적용한다.

$$E_{before} = E_{after}$$

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} + \frac{mc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = Mc^2$$

$$M = \frac{2m}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

합쳐진 덩어리의 질량이 두 덩어리의 질량보다 크다. $M > 2m$

질량 증가분

$$\Delta M = \frac{2m}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - 2m = \frac{2}{c^2}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - mc^2\right) = \frac{2K}{c^2}$$

질량의 증가분은 사라진 운동에너지에 배분된 질량과 같은 크기

위치에너지도 질량을 갖는다.

심층적 대칭성 : 상대론적인 '질량-에너지'와 '운동량'은 모두 항상 보존된다.

➡ 고전역학에서는 탄성충돌에서만 두 량이 보존된다.

예제 2.5 비탄성 충돌에서의 질량증가

$m = 5.0\mathrm{kg}$인 두 물체가 $u = 1000\mathrm{mi/h}$의 속력으로 다가와 비탄성 충돌을 한다. 질량증가를 계산하라.

$$u = 1000\mathrm{mi/h} = 450\mathrm{m/s}$$

$$\frac{u}{c} = \frac{4.5\times10^2\mathrm{m/s}}{3.0\times10^8\mathrm{m/s}} = 1.5\times10^{-6}$$

$u^2/c^2 \ll 1$이므로

$$\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2}$$

$$\Delta M = 2m\left(\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}-1\right) \approx 2m\left(1+\frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2}-1\right)$$
$$= \frac{mu^2}{c^2} = (5.0\text{kg})(1.5\times 10^{-6})^2 = 1.1\times 10^{-11}\text{kg}$$

연습문제 1 완전 비탄성 충돌에 대해 $\Delta M = 2\Delta K/c^2$ 임을 증명하라.

예제 2.6 그림 2.1 에 보인 비탄성 충돌 시 S'에서 운동량이 보존됨을 보여라.

핵분열

질량 M인 핵이 질량 M_1, M_2, M_3와 속력 u_1, u_2, u_3을 갖는 입자들로 핵분열한다.

$$Mc^2 = \frac{M_1c^2}{\sqrt{1-u_1^2/c^2}} + \frac{M_2c^2}{\sqrt{1-u_2^2/c^2}} + \frac{M_3c^2}{\sqrt{1-u_3^2/c^2}} \qquad (2.15)$$

$$M > M_1 + M_2 + M_3$$

붕괴 에너지

$$Q = [M-(M_1+M_2+M_3)]c^2 = \Delta mc^2 \qquad (2.16)$$

$\Delta m = M-(M_1+M_2+M_3)$은 핵분열 후 생성물의 운동에너지로 나타난다.

예제 2.7 핵분열 반응

$$\text{U}_{92}^{236} \rightarrow \text{Rb}_{37}^{90} + \text{Cs}_{55}^{143} + 3\text{n}_0^1$$

질량결손

$$\Delta m = M_{\text{U}} - (M_{\text{Rb}} + M_{\text{Cs}} + 3m_{\text{n}}) = 0.177537\text{u} = 2.9471\times 10^{-28}\text{kg}$$

붕괴에너지

$$\Delta m = (0.177537\text{u})(931.5\text{MeV}/\text{c}^2) = 165.4\text{MeV}/\text{c}^2$$

$$Q = \Delta mc^2 = 165.4\text{MeV}$$

1 kg의 우라늄의 핵분열에서 방출되는 에너지

$$N = \frac{6.02\times 10^{23}\text{atoms/mol}}{236\text{g/mol}}\cdot 1000\text{g} = 2.55\times 10^{24}\text{atoms}$$

$$E = (\text{효율})NQ = (0.40)(2.55\times 10^{24}\text{atoms})(165\text{MeV/atom})$$
$$= 1.68\times 10^{26}\text{MeV} = 7.48\times 10^{6}\text{kWh}$$

연습문제 2 이 에너지로 100W 전구를 얼마 동안 밝힐 수 있을까?

$\approx 8{,}500$년

결합에너지(binding energy ; BE)

복합입자의 질량이 그를 구성하는 입자 질량의 합보다 작은 경우

$$Mc^2 + BE = \sum_{i=1}^{n} m_i c^2 \qquad (2.17)$$

결합에너지의 근원 ; 중력, 전기력(화학적 힘), 핵력등

예) 물 분자 하나의 질량은, 속박되지 않은 두 수소 원자와 하나의 산소 원자의 질량의 합보다 작다.

핵융합

예) 두 중수소핵으로부터 하나의 헬륨 핵을 만들어 내는 반응

$$\text{H}_1^2 + \text{H}_1^2 \rightarrow \text{He}_2^4 + 23.9\text{MeV}$$

예제 2.8 물분자 하나는 수소 원자 두 개와 산소 원자 하나보다 얼마나 더 가벼운가?

물의 결합 에너지 = 3eV

$$\Delta m = (m_{\mathrm{H}} + m_{\mathrm{H}} - m_{\mathrm{O}}) - M_{\mathrm{H_2O}} = \frac{BE}{c^2} = \frac{3\mathrm{eV}}{c^2}$$

$$= \frac{(3.0\mathrm{eV})(1.6\times 10^{-19}\mathrm{J/eV})}{(3.0\times 10^8 \mathrm{m/s})^2} = 5.3\times 10^{-36}\mathrm{kg}$$

분자당 손실된 질량의 비는?

$$M_{\mathrm{H_2O}} = 18\mathrm{u} = 3.0\times 10^{-26}\mathrm{kg}$$

$$\frac{\Delta m}{M_{\mathrm{H_2O}}} = \frac{5.3\times 10^{-36}\mathrm{kg}}{3.0\times 10^{-26}\mathrm{kg}} = 1.8\times 10^{-10}$$

➡ 직접 측정하기에는 너무나 작은 양

1g의 $\mathrm{H_2O}$가 생성될 때 방출되는 에너지

$$E = \Delta mc^2 = (1.8\times 10^{-13}\mathrm{kg})(3.0\times 10^8\mathrm{m/s})^2 \approx 16\mathrm{kJ}$$

➡ 질량의 감소와는 대조적으로 쉽게 측정할 수 있는 양

2.4 상대론적 운동량과 에너지 보존

기본입자의 상호작용에서 상대론적 운동량과 에너지보존의 일상적 적용

운동량의 측정 : 자기장 내에서 경로의 곡률반경으로부터

운동에너지의 측정 : 물질 속에서의 이동거리로부터

운동량과 질량-에너지 보존과 결합 : 질량, 전하, 평균수명 등의 추정이 가능하다.

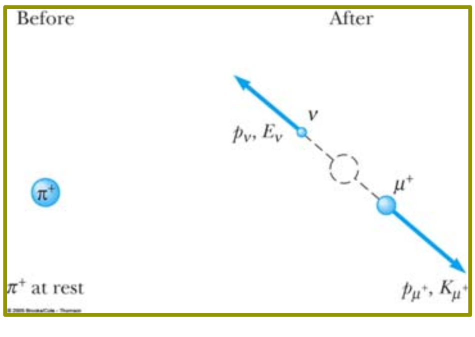
예제 2.9 π^+중간자 질량의 측정

π^+중간자(pion) : 양성자와 중성자 사이에 작용하는 강한 핵력을 담당하는 아원자 입자

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$$

$m_{\mu^+} = 106\mathrm{MeV/c^2}$, $K_{\mu^+} = 4.6\mathrm{MeV}$ 인 경우 m_{π^+}을 구하라.

(풀이) $E_\pi = E_\mu + E_\nu$



중성미자의 질량은 무시할 수 있으므로

$$m_\pi c^2 = \sqrt{(m_\mu c^2)^2 + (p_\mu^2 c^2)} + p_\nu c$$

(2.18)

운동량 보존을 적용하면

$$p_\mu = p_\nu$$

$$m_\pi c^2 = \sqrt{(m_\mu c^2)^2 + (p_\mu^2 c^2)} + p_\mu c$$

(2.19)

K_μ로부터 p_μ를 구한다.

$$p_\mu^2 c^2 = E_\mu^2 - (m_\mu c^2)^2 = (K_\mu + m_\mu c^2)^2 - (m_\mu c^2)^2$$
$$= K_\mu^2 + 2K_\mu m_\mu c^2$$

위 식을 (2.19)에 대입하면

$$m_\pi c^2 = \sqrt{m_\mu^2 c^4 + K_\mu^2 + 2K_\mu m_\mu c^2} + \sqrt{K_\mu^2 + 2K_\mu m_\mu c^2} \qquad (2.20)$$

$m_{\mu^+} = 106\mathrm{MeV/c^2}$, $K_{\mu^+} = 4.6\mathrm{MeV}$ 을 (2.20)에 대입하면

$$m_\pi c^2 = 111\mathrm{MeV} + 31\mathrm{MeV} \approx 1.4\times 10^2\mathrm{MeV}$$

$$m_\pi = 140\mathrm{MeV/c^2}$$

중간자의 질량은 $m_e = 0.511\mathrm{MeV/c^2}$ 와 $m_p = 938\mathrm{MeV/c^2}$ 의 중간 정도

2.5 일반 상대론

중력질량과 관성질량

$F_g = G\frac{m_g m_g'}{r^2}$: 중력질량

$\sum F = m_i a$: 관성질량

m_g 와 m_i는 10^{12} 분의 1정도까지 정확하게 비례한다.

중력의 효과와 관성력의 효과는 구분될 수 있는가?

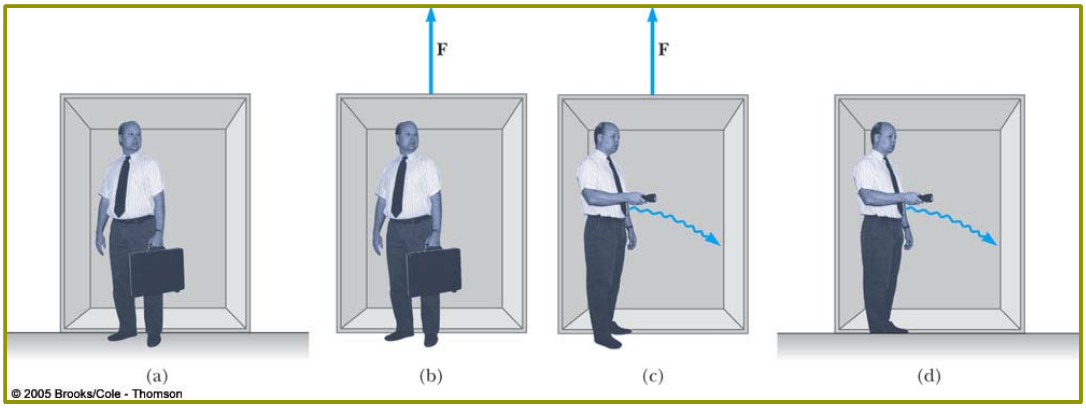


그림 2.4
(a) 아래로 작용하는 균일한 중력장 g 안에 정지해 있는 관찰자.
(b) 중력 없이 위로 향한 가속도 g를 갖는 기준틀 내의 관찰자.
(c) 위로 가속되는 기준틀 내의 빛줄기는 기준틀의 가속에 의해 빛줄기가 아래로 굽어진다.
(d) 중력효과와 가속도의 효과(관성의 효과)가 같다면 중력장에서 빛줄기가 아래로 굽어야 한다.

일반상대론의 가설

(1) 자연의 법칙은 가속되거나 아니거나 모든 기준틀의 관찰자들에게 동일한 형태를 가진다.
(2) 모든 점의 부근에서 중력장은 중력효과가 없는 곳에서의 가속계와 동등하다.

➡ 등가원리(principle of equivalence)-

일반상대론에 의해 예측된 흥미로운 효과

중력이 있는 곳의 시계는 중력이 무시할 만한 곳에 있는 시계보다 느리게 간다.
중력적 적색천이(gravitational red shift) : Moessbauer 효과에 의해 증명됨
질량의 존재는 그 질량 주위의 시공간의 곡률을 야기한다.

➡ 이 곡률은 모든 자유로이 움직이는 물체가 따라야 하는 시공간상의 경로를 결정

➡ 시공간의 곡률은 뉴턴의 중력 이론을 완전히 대체한다.

➡ 일반 상대성 이론은 힘의 개념을 휘어진 시공간을 따르는 물체의 운동으로 대체

태양 근처를 지나는 빛이 태양에 의해 생긴 시공간의 휘어짐 속에서 굽어져야 한다.

➡ 블랙홀(black hole)의 존재를 입증한다.

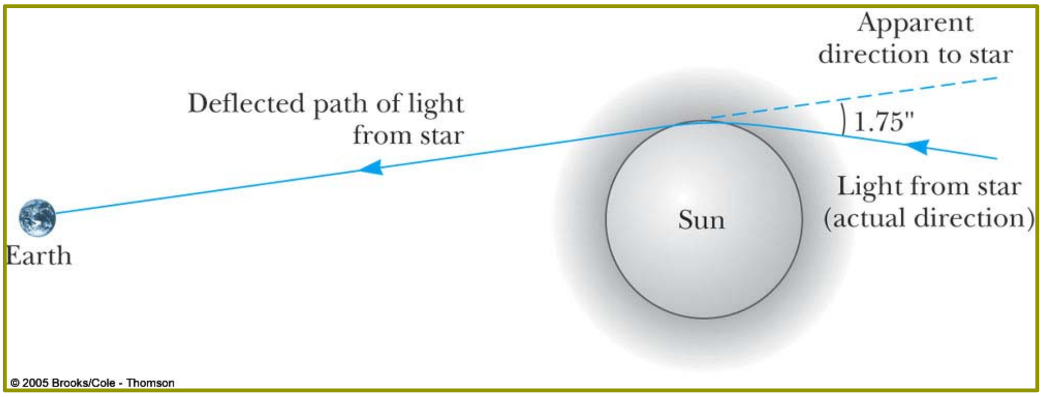


그림 2.5 태양 근처를 지나는 별빛의 휨.

중력복사, 또는 찾기 힘든 좋은 파동

일반 상대론의 '장 방정식'의 해가 전자기 이론의 해와 유사한 파동 형태를 가진다. 아인슈타인(1916)

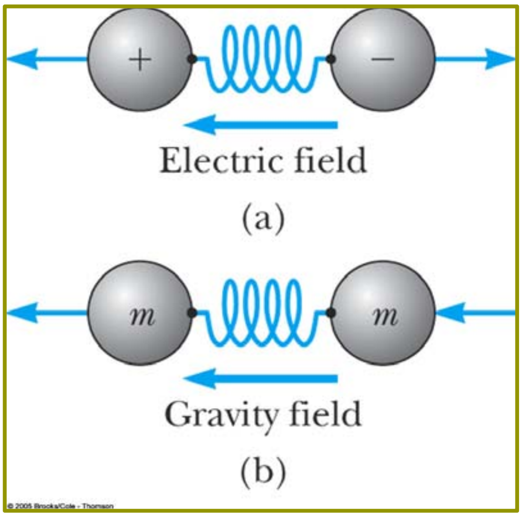
중력파

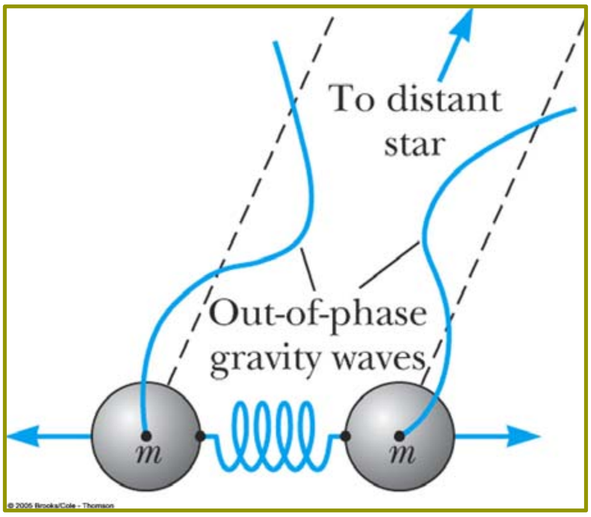
、입자와 파동의 이중성
、빛의 속력
、$E = pc$

중력파의 검출 프로그램

1968년 웨버(Joseph Weber) ; 진공상에 매달려 있는 무거운 막대들로 된 검출기
웨버막대 : 1m의 막대에 대해 10^{-20}m의 길이 변화를 검출해야 한다.
LIGO(laser-interferometric gravitational-wave observatories)

- 、레이저-간섭 중력파 관측소 : 4km의 팔
- 、루이지애나 주의 리빙스턴과 워싱턴 주의 핸포드
- 、2000마일 떨어진 두 시설에서 동시에 발생하는 신호를 찾는다.





중력파의 간접적 증거

쌍성 펄서의 발견 : 1974년 Russell Hulse, Joseph Taylor

펄서 : 전파 펄서를 방출하는 중성자별, 주기=27906.980895초

쌍성 펄서의 궤도 주기의 감소 :

- $T = 59\ \mathrm{ms}$
- 、예측치=75.8μs/year
- 、실측 값은 0.5% 이내에서 잘 맞는다.→중력파의 증거

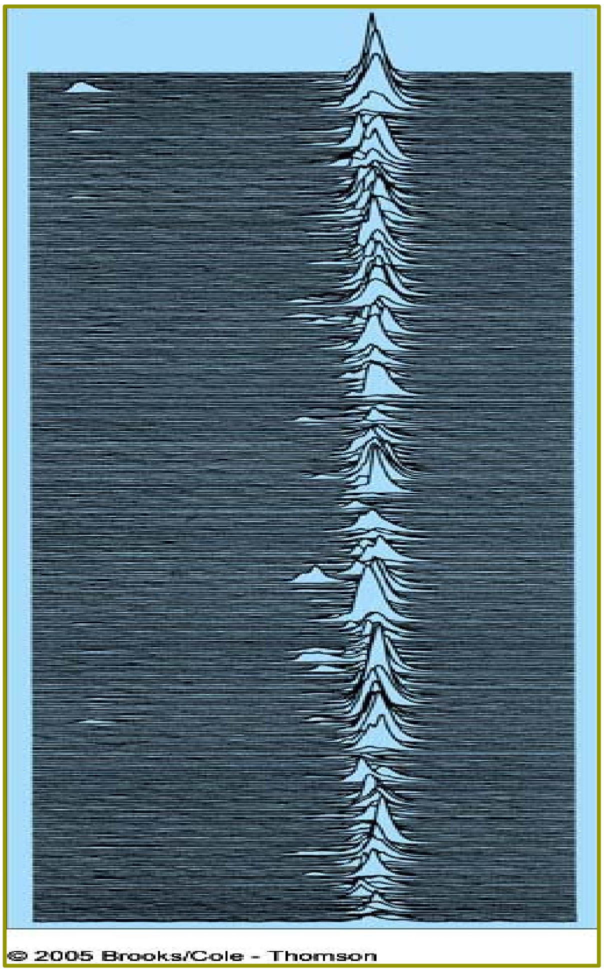


그림 2.11 PSR 0950+08 펄스로부터의 400개의 연속적인 전파펄스. 400개의 선 하나하나는 연속적인 시간 간격 0.253초를 나타낸다.

1-8 상대론적 Energy

$\vec{F}=\dfrac{d\vec{p}}{dt}$: 힘의 정의

$\vec{p}=\gamma m\vec{u}$: 상대론적 운동량

★ $\vec{F}=m\vec{a}=m\dfrac{d\vec{u}}{dt}$ 는 맞지 않다. ($\because \vec{p}=m\vec{u}$ 가 보존되는 결과가 나온다.)

상대론적 운동 Energy

$$T=\int_{u=0}^{u}Fds=\int_0^u\frac{d\gamma mu}{dt}ds=\int_0^u ud(\gamma mu) \qquad (1.24)$$

$$d(\gamma mu)=m\gamma du+mud\gamma$$

$$d\gamma=d(1-u^2/c^2)^{-1/2}=\frac{u}{c^2}(1-u^2/c^2)^{-3/2}du$$

$$d(\gamma mu)=m[(1-\frac{u^2}{c^2})^{-1/2}du+\frac{u^2}{c^2}(1-\frac{u^2}{c^2})^{-3/2}du]$$

$$\therefore T=\int_0^u ud(\gamma mu)=\int_0^u m(1-u^2/c^2)^{-3/2}udu$$

$$=mc^2[(1-\frac{u^2}{c^2})^{-1/2}-1]$$

즉

$$T=\gamma mc^2-mc^2 \qquad (1.28)$$

u/c 《 1 인 저속의 경우

$$\gamma=(1-\frac{u^2}{c^2})^{-1/2}\approx 1+\frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2}+\cdots$$

$$\therefore T\approx mc^2(1+\frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2}+\cdots-1)=\frac{1}{2}mu^2$$

정지 Energy : $E_0\equiv mc^2$ 로 정의하면

총 Energy : $E=T+mc^2=\gamma mc^2=\gamma E_0$ (1.29)

총 Energy, 정지 Energy 및 상대론적운동량 사이의 중요한 관계

$$E^2=\gamma^2E_0^2$$

$$p^2=\gamma^2m^2u^2=\gamma^2E_0^2u^2/c^4$$

$$E^2-p^2c^2=\gamma^2E_0^2(1-u^2/c^2)$$

$$\gamma^2=\frac{1}{1-u^{2/}c^2}$$ 이므로

$$E^2 = P^2c^2 + E_0^2 \tag{1.31}$$

광자는 질량이 영이므로

$$E = pc \tag{1.32}$$

두 입자의 비탄성 충돌

S 계 : 두 입자가 u 로 접근 → 충돌후 정지

S′계 : 1 입자는 정지, 2 입자는 u′→ 충돌후 u(좌측으로 운동)

$$u' = \frac{u+v}{1+uv/c^2} = \frac{2u}{1+u^2/c^2}$$

S′계의 충돌 전 운동량

$$p_1{}' = \frac{m_1u'}{\sqrt{1-u'^2/c^2}}$$

충돌 후

$$p_2{}' = \frac{M_2u}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

$$1-\frac{u'^2}{c^2} = 1-\frac{4u^2/c^2}{(1+u^2/c^2)^2} = \frac{(1-u^2/c^2)^2}{(1+u^2/c^2)^2}$$

$$\therefore p_1{}' = \frac{m_1[2u/(1+u^2/c^2)]}{(1-u^2/c^2)/(1+u^2/c^2)} = \frac{2m_1u}{1-u^2/c^2}$$

S′계에서 운동량이 보존되면 $p_1{}' = p_2{}'$

$$\frac{2m_1u}{1-u^2/c^2} = \frac{M_2u}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

이것은 $M_2 = \dfrac{2m_1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$ 인 경우에 성립

운동량의 보존법칙이 S 계 및 S′계에서 똑 같이 성립하자면 충돌후의 정지질량이 증가(M_2 - $2m_1$)해야한다.

$$\Delta m = M_2 - 2m_1 = 2m_1[(1-\frac{u^2}{c^2})^{-1/2} - 1] = 2m_1(\gamma-1) \tag{1-40}$$

➡ S 계 : 운동 Energy가 정지 Energy로 변하였다.

$$T = 2m_1c^2(\gamma-1) = c^2\Delta m \tag{1-41}$$

* 운동에너지의 손실은 S계와 S′계에서 서로 같다.

**S계의 원래의 운동에너지 → potential energy : 정지질량의 증가

***정지 energy → 운동 energy : 핵분열

질량과 결합 Energy

결합 Energy(binding energy) : 결합된 계의 정지질량은 분리된 입자들의 질량의 합보다 작다.

통일질량단위 : 1 u ; C^{12} 의 1/12 의 질량

$$1\ u = \frac{1g}{6.0225 \times 10^{23}} = 1.66043 \times 10^{-24} g = 1.66043 \times 10^{-27}\text{kg}$$

$$1eV = 1.602 \times 10^{-19} coul \cdot volt = 1.602 \times 10^{-19} joul$$

$$1keV = 10^3 ev,\ 1MeV = 10^6 eV,\ 1\ GeV = 10^9 eV$$

1g의 정지에너지는

$$1g \times c^2 = (10^{-3} kg)(3 \times 10^8 m/\text{sec})^2$$

$$= 9 \times 10^{13} joules = 5.61 \times 10^{32} eV$$

$$1\ u \times c^2 = 931.5 MeV;\ 1\ u\text{의정지질량}$$

몇가지 편리한 근사식

고전론 : $\gamma \rightarrow 1$, T《 mc^2

상대론 : γ》 1, T ~ mc^2

$$\gamma = \frac{E}{mc^2} = 1 + \frac{T}{mc^2}$$

상대론적 운동 Energy : T = $(\gamma-1)mc^2$

고전론적 운동 Energy : T = 1/2 mu^2

고전론적 근사

$$\gamma = (1 - \frac{u^2}{c^2})^{-1/2} \simeq 1 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{u^4}{c^4} + \cdots$$

이므로

$$\therefore T = (\gamma - 1)mc^2 \simeq \frac{1}{2}mu^2 + \frac{3}{2}\frac{(\frac{1}{2}mu^2)^2}{mc^2}$$

$$\frac{3}{2}\frac{T^2}{E_0} \leq \frac{T}{100}\ \text{즉}\ T \leq \frac{2}{3} \times \frac{E_0}{100} = \frac{E_0}{150}\ \text{이면}$$

$$\rightarrow \text{고전론식}\,(T = \frac{1}{2}mu^2)\text{의오차는 1percent 미만}$$

고 Energy 근사

$pc \gg E_0$ 이면

$$E = (p^2c^2 + E_0^2)^{1/2} = pc(1 + \frac{E_0^2}{p^2c^2})^{1/2} \approx pc(1 + \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{p^2c^2} + \cdots)$$

$$E \approx pc$$

로 근사하면 무시된 첫째항은

$$\frac{1}{2}\frac{E_0^2}{pc} \approx \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{E}$$

$$\frac{1}{2}\frac{E_0^2}{E} \leqq \frac{E}{100} \quad i.e.\ E > E_0\sqrt{50} \approx 7E_0 \text{일때} \quad \sim 1\,{}^0/_0 \text{미만의 오차}$$

예제 ** 전자와 양성자가 10^7 volt로 가속되었다. 각 입자의 운동량과 속도를 구하라.

(a) 전자의 정지 Energy = 0.511 MeV

$$E_0 = 0.511 MeV$$

$$\gamma = 1 + \frac{T}{E_0} = 1 + \frac{10}{0.51} = 20.6 \neq 1$$

→고전론의 근사식을 쓸 수 없다.

$$p = \frac{E}{c} = \frac{E_0 + T}{c} = 10.511 \ \ MeV/c \text{ : 운동량}$$

$$p = \gamma\mu = \frac{\gamma(mc^2)u}{c^2}$$

$$\frac{u}{c} = \frac{pc}{\gamma mc^2} = \frac{10.511 \ \ MeV}{(20.6)(0.511)MeV} = 0.999$$

(b) 양성자

$$E_0 = 938 \ \ MeV$$

$$\gamma = 1 + \frac{10}{938} = 1.01 \simeq 1$$

→고전론 근사로 충분

$$T = \frac{1}{2}\mu^2 = 10\,MeV$$

$$\left(\frac{u}{c}\right)^2 = \frac{2\times 10MeV}{mc^2} = \frac{20}{938} = 2.13\times 10^{-2}$$

u = 0.146 c : 양성자의 속도

상대론적 운동량

$$p = \gamma\mu = \frac{(1.01)(mc^2)u}{c^2} = (1.01)(938)(0.146)MeV/c \simeq 138 \ \ MeV/c$$

고전론적 운동량

$$T = \frac{p^2}{2m} = \frac{p^2c^2}{2mc^2}$$

$$pc = (2mc^2T)^{1/2} = (2\times 938\times 10)^{1/2}MeV = 137\,MeV$$

$$p = 137MeV/c$$

▒▒▒▒▒Tipler▒▒※End※▒▒